Введение в теорию принятия решений и математическую статистику

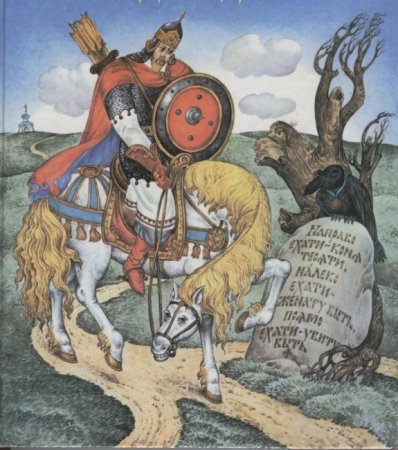
# Природа принятия решения

Во всех областях своей деятельности человек постоянно так или иначе сталкивается с проблемой принятия решения, или, говоря другими словами, задачей выбора одного способа действий (решения) из дискретного или непрерывного спектра возможностей. В большинстве случаев человек, поставленный перед такой проблемой, принимает решение интуитивно, основываясь на своем жизненном опыте, или руководствуясь какими-то простыми качественными соображениями. Тем не менее, в некоторых случаях такой наивный подход недостаточен и для обоснования решения требуется не только качественное, но и количественное обоснование.

Пример: Строитель выбирает материалы для постройки дома. На основе своего опыта, он приблизительно представляет, какие именно материалы ему нужны и у каких производителей их лучше покупать, но проблема заключается в том, что ему нужно не только выбрать нужные материалы, но и обосновать свой выбор, чтобы заказчик утвердил смету. Для обоснования своего решения строитель вынужден опираться на количественные показатели, такие как цена материалов, отзывы о производителях и так далее.

Пример: Выбирая студентов, которые будут получать повышенную стипендию в следующем семестре, декан факультета не может основывать свой выбор на личных предпочтениях, поскольку он не может на основе собственного опыта оценить, насколько тот или иной студент достоин этого, а назначить повышенную стипендию всем студентом он не имеет никакой возможности. В результате он вынужден использовать формальные численные показатели, такие как средний бал на зачетах.

В случаях, когда лицо, принимающее решение (будем так в дальнейшем называть того, перед кем поставлена проблема выбора), обладает всей полнотой информации о том, какой выбор приведет к каким последствиям, формализация задачи принятия решения сводится к введению некоторой функции полезности, которая каждому возможному исходу сопоставляет некоторое число, называемое полезностью, значение которого тем выше, чем больше удовлетворение лица, принимающего решение (сокращенно ЛПР) в случае этого исхода. Вполне естественно, что наилучшим решением будет то, полезность исхода которого выше. Сам выбор функции полезности к сожалению полностью субъективен и может быть различным для разных ЛПР.



Пример: Проезжая проселочной дорогой, некоторый богатырь обнаружил на камне неизвестного происхождения следующую надпись: "Направо ехати - коня теряти, налево ехати - женату быть, прямо ехати - убиту быть". Если предположить, что сведения камня полностью достоверны, то формальный подход ничем богатырю в выборе пути помочь не может, поскольку тут все целиком и полностью зависит от жизненных приоритетов самого богатыря. Несмотря на всю привлекательность левого пути для большинства людей, нельзя исключить, что в личной системе ценностей богатыря этот путь гораздо хуже, чем, скажем, путь прямо.

На практике главным образом из психологических соображений оказалось удобнее использовать не функцию полезности, а обратную ей функцию потерь. Чем меньше потери, тем предпочтительнее решение.

Более важным и интересным случаем задачи принятия решений является ситуация, когда исход (результат решения) не является детерминированным, то есть при фиксированном решении, с некоторой вероятностью могут наблюдаться различные исходы. Такая задача также не представляет проблемы, поскольку, зная зависимость полезности или потерь от исхода, можно всегда вычислить средние потери или среднюю полезность для каждого решения.

Наибольший интерес с точки зрения теории принятия решений представляют задачи, куда входит некоторый неизвестный параметр или состояние природы. Этот случай мы рассмотрим более подробно после того, как введем формальные определения для всех нужных понятий.

# Простые решения

Для начала определим уже использованные нами понятия:

* Определим множество *A*  как пространство действий ; *а -* действия, доступные ЛПР – лицу, принимающему решение.
* Определим множество как пространство всевозможных исходов или результатов, к которым приводят действия из *A.*

В случае, когда исход зависит исключительно от действий ЛПР и не является случайным, можно считать, что пространство исходов *R* полностью совпадает с пространством действий *A*, и тогда вместо того, чтобы говорить о полезности или потерях при определенных исходах, можно говорить о потерях при определенном действии. В противном случае исход является некоторой функцией действия *a* и, возможно каких-то дополнительных параметров задачи, которые не зависят от ЛПР.

* Определим множество - пространство параметров (состояний Природы) .  *-* всевозможные состояния Природы, из которых реализуется лишь одно. Это единственное “истинное” состояние неизвестно ЛПР в тот момент, когда необходимо принять решение. С точки зрения математического формализма, размерность пространства может быть любой, то есть в общем случае – это не один параметр, а набор параметров.

Таким образом, получаем:

* Введем также функцию потерь . Потери тем выше, чем меньше удовлетворение ЛПР результатом принятия решения. В случае, когда результат не является детерминированным, будем говорить о средних потерях: .

Пример: Студент Васькин[[1]](#footnote-1) не хочет идти на лекцию утром в субботу, но он знает, что лектор время от времени устраивает перепись присутствующих. Васькин оценивает свои потери следующим образом:

* Если он не пойдет на лекцию и переписи не будет, то он ничего не теряет и его потери равны нулю.
* Если он не пойдет на лекцию и будет перепись, то это очень плохо и потери равны 10.
* Если он пойдет на лекцию, то потери будут равны 5, независимо от того, будет перепись или нет.

От старших товарищей Васькин знает, что вероятность переписи равна 0.25, получаем следующие средние потери:

* Если он идет на лекцию: 5
* Если он не идет на лекцию:

# Сложные решения

До сих пор мы имели дело только с решениями в условиях, когда ЛПР на момент принятия решения обладает всей полнотой информации о задаче. Рассмотрим теперь более сложный вариант, когда результат существенно зависит от некоторого параметра . В том случае, когда ЛПР принципиально не может получить никакой информации о , приходится делать некоторое предположение о вероятности того или иного значения и таким образом задача сводится к предыдущей[[2]](#footnote-2). Остановимся подробнее на случае, когда для получения информации о состоянии природы ЛПР может поставить некоторый эксперимент. Ситуация, когда результат эксперимента дает возможность однозначно определить, какое состояние природы реализуется, является тривиальной, поэтому мы будем рассматривать только случай, когда эксперимент дает только ограниченный объем информации о параметре.

* Определим результат эксперимента (или экспериметнальную выборку) и соответствующее множество . Предположим, что результат эксперимента описывается семейством функций плотности вероятности (ФПВ) или дискретным распределением , где .

Также нам необходимо ввести понятие стратегии, которое является ключевым для теории принятия решений.

* Определяется множество *D* - пространство решений (будем называть их стратегиями) c элементами *s* , отображающими *Х* в *A*: . Стратегию s иногда называют решающей функцией и она представляет собой алгоритм, который надо применить к наблюдениям, чтобы определить действие – принять решение.
* Определим функцию риска, как средние потери в зависимости от состояния природы и стратегии выбора решения: . Нужно отметить, что функция риска не зависит от результата наблюдений, так как потери усредняются по всем возможным наблюдениям.

Пример: Начался новый семестр, а студент Васькин все еще любит спать по утрам. На этот раз у него нет информации о частоте переписей присутствующих.

Он решает сходить на две лекции и строить решения о посещении остальных лекций согласно той информации, которую он получит. Среди всех доступных Васькину стратегий выберем для дальнейшего рассмотрения четыре наиболее очевидные:

1. Пойти на третью лекцию независимо от того, что он увидит на первых двух.
2. Пойти на третью лекцию, если хотя бы на одной из первых лекций будет перепись.
3. Пойти на третью лекцию только в том случае, когда на обеих из первых двух лекций будет перепись.
4. Не ходить на третью лекцию в любом случае.

Васькин понимает, что результат его эксперимента имеет случайную природу, поэтому рисует следующую таблицу для :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вероятность проверки** | **Нет проверок** | **1 проверка** | **2 проверки** |
| **1** | 0 | 0 | 1 |
| **0.75** | 0.0625 | 0.375 | 0.5625 |
| **0.5** | 0.25 | 0.5 | 0.25 |
| **0.25** | 0.5625 | 0.375 | 0.0625 |
| **0** | 1 | 0 | 0 |

Далее студент вычисляет функцию риска. Для этого он для начала строит таблицу потерь (в ячейках через запятую показаны значения потерь для стратегий с соответствующими номерами):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вероятность проверки** | **Нет проверок** | **1 проверка** | **2 проверки** |
| **1** | 5, 10, 10, 10 | 5, 5, 10, 10 | 5, 5, 5, 10 |
| **0.75** | 5, 7.5, 7.5, 7.5 | 5, 5, 7.5, 7.5 | 5, 5, 5, 7.5 |
| **0.5** | 5, 5, 5, 5 | 5, 5, 5, 5 | 5, 5, 5, 5 |
| **0.25** | 5, 2.5, 2.5, 2.5 | 5, 5, 2.5, 2.5 | 5, 5, 5, 2.5 |
| **0** | 5, 0, 0, 0 | 5, 5, 0, 0 | 5, 5, 5, 0 |

После суммирования, Васькин наконец получает значения для функции риска, которые лучше отобразить в графическом виде:

Видно, что если реальная вероятность проверки составляет 0.5, то все стратегии демонстрируют один и тот же результат. С другой стороны, при других значениях вероятности соотношение рисков для разных стратегий могут быть различными. Для продолжения решения задачи требуется ввести какие-то правила выбора стратегии.

1. Здесь и далее любое возможное совпадение с реальными персонажами считать случайным. [↑](#footnote-ref-1)
2. Нужно обратить внимание, что интерпретация параметра, информации о котором не достаточно, как случайного требует использования так называемого Байесовского или субъективного определения вероятности. В дальнейшем будем считать, что используется именно эта интерпретация вероятности. Подробнее о проблеме определения вероятности можно прочитать в [глава в Идье] [↑](#footnote-ref-2)